

CONTROLE ROBUSTO H_∞ DE ESTRUTURAS FLEXÍVEIS COM DINÂMICA REDUZIDA

Carlos E. Ingar Valer

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio
Departamento de Engenharia Mecânica
CEP 22453-900 – Gávea, RJ, Brasil
cingar@mec.puc-rio.br

Rubens Sampaio

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, PUC-Rio
Departamento de Engenharia Mecânica
CEP 22453-900 – Gávea, RJ, Brasil
rsampaio@mec.puc-rio.br

Resumo. Neste trabalho é proposta uma solução para o problema do spillover no controle ativo de estruturas flexíveis com pouco amortecimento, usando a técnica moderna de controle robusto H_∞ com realimentação de saídas. Esta metodologia garante a estabilidade do sistema de controle mesmo em presença de dinâmica residual, resultando assim um controlador robusto e eficaz, pois permite um bom desempenho do sistema de controle. Como ilustração, é projetado um sistema de controle para uma estrutura flexível formada por elementos de barras, a qual é modelada usando o método dos elementos finitos. O projeto foi feito usando o Matlab[®] e as simulações através do Simulink[®]. Os resultados comprovaram a efetividade do método.

Palavras-chave: Estrutura flexível, Spillover, Controle robusto

1. INTRODUÇÃO

O controle ativo de estruturas flexíveis não se enquadra na teoria de controle de sistemas lineares convencionais já que as estruturas flexíveis, por serem sistemas com parâmetros distribuídos, têm espaço de estados de dimensão infinita enquanto que as metodologias convencionais de controle foram desenvolvidas para sistemas com dimensão finita. A representação de estruturas flexíveis através de modelos obtidos usando métodos aproximados de discretização no espaço (como o método dos elementos finitos e o método dos modos assumidos) conduzem a sistemas dimensionalmente finitos. No entanto, para obter uma boa representação do sistema é preciso usar modelos de alta ordem. Infelizmente, o controle de um sistema com um modelo de alta ordem implica em um controlador de alta ordem, o qual na prática não é factível já que por limitações numéricas e de hardware numa implementação em tempo real, o controlador tem que ser de ordem baixa. Isto é porque algoritmos numéricos para a solução das equações de Riccati não funcionam bem em

sistemas de alta ordem, além disso, se fosse possível sintetizar um controlador, sua implementação física precisaria de um processador para resolver um grande número de equações diferenciais em tempo real. Neste sentido, uma alternativa é o truncamento destes modelos para obter modelos de ordem reduzida, ignorando normalmente os modos de alta frequência. Contudo, a dinâmica não considerada (dinâmica residual) pode causar a instabilidade do sistema de controle. Este fenômeno é chamado de *spillover* (derramamento) na literatura (Meirovitch, 1990).

Existem duas contribuições ao *spillover*. A primeira é o *spillover* de controle ou excitação dos modos residuais pela ação do controlador. A segunda é o *spillover* de observação ou contaminação da saída dos sensores com a resposta dos modos residuais. Quando ambos os tipos de *spillover* estão presentes, os autovalores do sistema em malha fechada podem ser deslocados de forma a tornar o sistema instável. O perigo potencial de instabilidade aumenta quando maior é o número de modos residuais e menor seja o amortecimento natural destes modos. Varias soluções para esse problema têm sido propostas na literatura, contudo o problema foi resolvido só de forma parcial (Chait & Radcliffe, 1989, Meirovitch, 1983).

Neste artigo é proposta uma solução para o problema do *spillover* usando técnicas modernas de controle robusto, sintetizando assim um controlador capaz de garantir a estabilidade do sistema mesmo quando há presença da dinâmica residual.

2. MODELO NOMINAL E A DINÂMICA RESIDUAL

O modelo dinâmico de uma estrutura flexível obtido por técnicas de discretização no espaço (tal como o método dos elementos finitos) pode ser expresso pelas seguintes relações na forma modal (Junkins & Kim, 1993) :

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \Omega^2 \mathbf{q}(t) = \mathbf{B}_{ma} \mathbf{u}(t) \quad (1)$$

onde \mathbf{q} é o vetor de coordenadas modais, de forma que o vetor de deslocamentos nos nós da estrutura pode ser determinado por :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{U} \mathbf{q}(t) \quad (2)$$

sendo \mathbf{U} a matriz modal da estrutura. Adicionalmente, com fins de controle, é preciso medir algumas variáveis de resposta do sistema (por exemplo, deslocamentos nodais), o que pode ser representado na seguinte equação :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_s \mathbf{U} \mathbf{q}(t) \quad (3)$$

Alternativamente, Eq. (1) e Eq. (2) podem ser re-escritas em forma particionada :

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_N(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}_R(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_N^2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Omega_R^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_N(t) \\ \mathbf{q}_R(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ma,N} \\ \mathbf{B}_{ma,R} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_s \begin{bmatrix} \mathbf{U}_N & \mathbf{U}_R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_N(t) \\ \mathbf{q}_R(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde o sub-índice N denota os modos nominais, ou seja aqueles que são considerados no modelo usado no projeto do sistema de controle e R denota os modos residuais (aqueles ignorados no modelo nominal. Na forma de estado, estas equações resultam :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_N(t) = \mathbf{A}_N \mathbf{x}_N(t) + \mathbf{B}_N \mathbf{u}(t) , & \mathbf{y}_N(t) = \mathbf{C}_N \mathbf{x}_N(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_R(t) = \mathbf{A}_R \mathbf{x}_R(t) + \mathbf{B}_R \mathbf{u}(t) , & \mathbf{y}_R(t) = \mathbf{C}_R \mathbf{x}_R(t) \end{cases} \quad (6)$$

onde os vetores de estados correspondentes ao sistema nominal e residual são respectivamente $\mathbf{x}_N(t) = [\mathbf{q}_N(t) \ \dot{\mathbf{q}}_N(t)]$ e $\mathbf{x}_R(t) = [\mathbf{q}_R(t) \ \dot{\mathbf{q}}_R(t)]$. Quando um sistema de controle por realimentação de estados é baseado no modelo nominal $(\mathbf{A}_N, \mathbf{B}_N, \mathbf{C}_N)$ com matriz de ganho de realimentação \mathbf{F}_N , é fácil mostrar que a matriz de estado do sistema controlado quando há dinâmica residual é dado por :

$$\mathbf{A}_{re} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_N - \mathbf{B}_N \mathbf{F}_N & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_R \mathbf{F}_N & \mathbf{A}_R \end{bmatrix} \quad (7)$$

O ganho \mathbf{F}_N é determinado de forma que a matriz $\mathbf{A}_N - \mathbf{B}_N \mathbf{F}_N$ seja uma matriz de Hurwitz (ou seja, com todos seus autovalores com parte real negativa); claramente a matriz \mathbf{A}_{re} é, também, uma matriz de Hurwitz. No entanto, se o sistema de controle é baseado num observador de estado, a matriz de estado do sistema resultante pode ser mostrada ser da forma (Ingar, 1999) :

$$\mathbf{A}_{rs} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_N - \mathbf{B}_N \mathbf{F}_N & -\mathbf{B}_N \mathbf{F}_N & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_N - \mathbf{K}_N \mathbf{C}_N & \mathbf{K}_N \mathbf{C}_R \\ -\mathbf{B}_R \mathbf{F}_N & -\mathbf{B}_R \mathbf{F}_N & \mathbf{A}_R \end{bmatrix} \quad (8)$$

onde \mathbf{K}_N é o ganho do observador de estado e é determinado de forma que a matriz $\mathbf{A}_N - \mathbf{K}_N \mathbf{C}_N$ seja estável. Neste caso, a matriz \mathbf{A}_{rs} já não é diagonal por blocos e, portanto, pode não ser uma matriz de Hurwitz devido aos termos $\mathbf{B}_R \mathbf{F}_N$ e $\mathbf{K}_N \mathbf{C}_R$ os quais podem ser identificados como o *spillover* de controle e o *spillover* de observação, respectivamente. É claro que quanto menor for o amortecimento natural dos modos residuais, ou seja, quanto mais perto do eixo imaginário estiverem os autovalores da matriz \mathbf{A}_R , a possibilidade de que autovalores de \mathbf{A}_{rs} apresentem parte real positiva, devido à perturbação dos termos do *spillover*, será maior. Assim, num sistema de controle baseado em observador, que na verdade é um sistema de controle por realimentação de saídas, a estabilidade do sistema não é garantida na presença de modos residuais.

3. CONTROLE ROBUSTO H_∞

A técnica de controle H_∞ pode ser interpretada do ponto de vista do seguinte paradigma: tanto as especificações de desempenho como as de robustez podem ser incorporadas numa planta generalizada \mathbf{P} , suposta linear e invariante no tempo, que contém toda a informação necessária para a síntese do controlador \mathbf{C} . Assim, a dinâmica do sistema a controlar, a

incerteza no modelo e pesos dependentes da frequência \mathbf{W}_i para influenciar a síntese do controlador, são incluídos nesta planta.

Como mostrado na Fig.1, essa planta tem duas entradas e duas saídas, onde \mathbf{u} é o vetor de entradas geradas pelo controlador e \mathbf{y} representa o vetor de variáveis medidas usadas para realimentação. O vetor de entrada \mathbf{w} representa entradas exógenas e o vetor \mathbf{z} variáveis de desempenho que queremos minimizar.

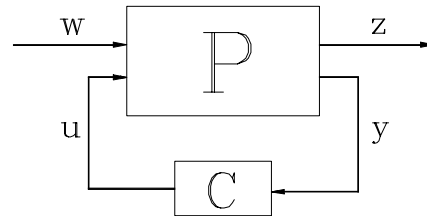


Figura 1 – O paradigma moderno de controle

Uma realização no domínio do tempo para a planta generalizada é a seguinte:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_a(t) = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{D}_{11} \mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2 \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{D}_{21} \mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{22} \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (9)$$

Agora, com base nessa planta, o problema geral de controle consiste na síntese de um controlador \mathbf{C} de forma a manter as variáveis de desempenho \mathbf{z} pequenas na presença das variáveis exógenas \mathbf{w} . Ou matematicamente, achar um controlador \mathbf{C} tal que:

$$\|\mathbf{T}_{zw}(j\omega)\|_{\infty} < 1 \quad (10)$$

onde \mathbf{T}_{zw} é a função de transferência entre \mathbf{z} e \mathbf{w} . Devido a uma propriedade especial da norma H_{∞} , a Eq. (10) implica que a norma H_{∞} de cada sub-matriz $(\mathbf{T}_{zw})_{ij}$ da função de transferência \mathbf{T}_{zw} é, também, menor que a unidade, ou seja :

$$\|(\mathbf{T}_{zw})_{ij}\|_{\infty} < 1 \quad (11)$$

desta maneira, a tarefa do projetista se reduz à escolha adequada dos pesos \mathbf{W}_i considerados na planta generalizada de forma a conseguir o cumprimento das especificações do projeto quando a condição da Eq. (10) é satisfeita. Soluções para o problema do controle H_{∞} foram dadas por Doyle *et. al.* (1989).

4. APLICAÇÃO

Com a finalidade de ilustrar o método é considerado aqui o projeto de um sistema de controle robusto para a estrutura flexível mostrada na Fig. 2. A modelagem foi realizada aplicando-se o método dos elementos finitos e usando-se recursos do programa Matlab[®]. Os elementos da estrutura foram consideradas como barras de comprimento $l_1 = l_2 = 1 \text{ m}$. O material dos elementos é o aço ($E = 207 \times 10^9$, $\rho = 7806 \text{ kg/m}^3$) e a área da seção

transversal $A = 400 \text{ mm}^2$. Um pequeno amortecimento de $\xi = 0.001$ foi acrescentado a cada um dos modos de vibração.

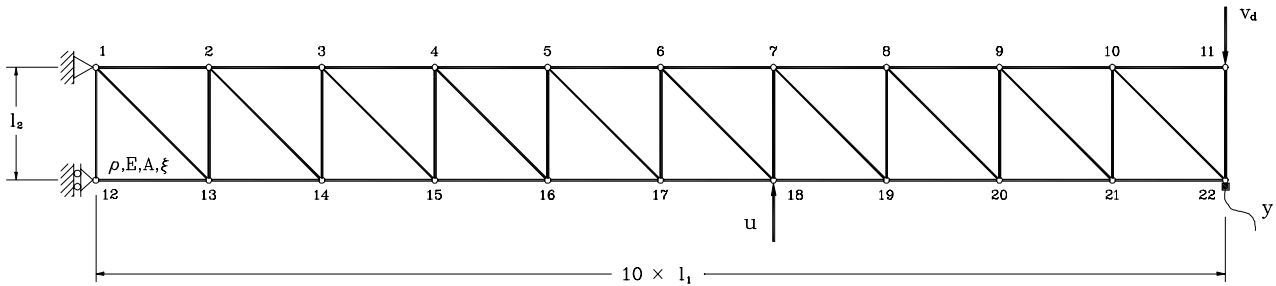


Figura 2 – Estrutura flexível com muitos modos de vibração e pouco amortecimento

Já que a estrutura tem 41 graus de liberdade, o modelo na forma de espaço de estados resultou de ordem 82. Obviamente, por limitações numéricas e de hardware não é possível sintetizar um controlador para um modelo dessa ordem e por essa razão foi considerado um modelo nominal com apenas os $N = 6$ primeiros modos da estrutura e os $R = 41 - 6 = 35$ restantes (a dinâmica residual) foram considerados como uma incerteza no modelo. A Fig. 3-(a) mostra claramente a diferença entre o modelo nominal e o modelo completo. Além disto, na Fig. 3-(b) a função de resposta em frequência entre um distúrbio v_d e o sinal de saída y é apresentada, da qual é evidente o pouco amortecimento natural da estrutura e daí a necessidade de um sistema de controle ativo de vibração.

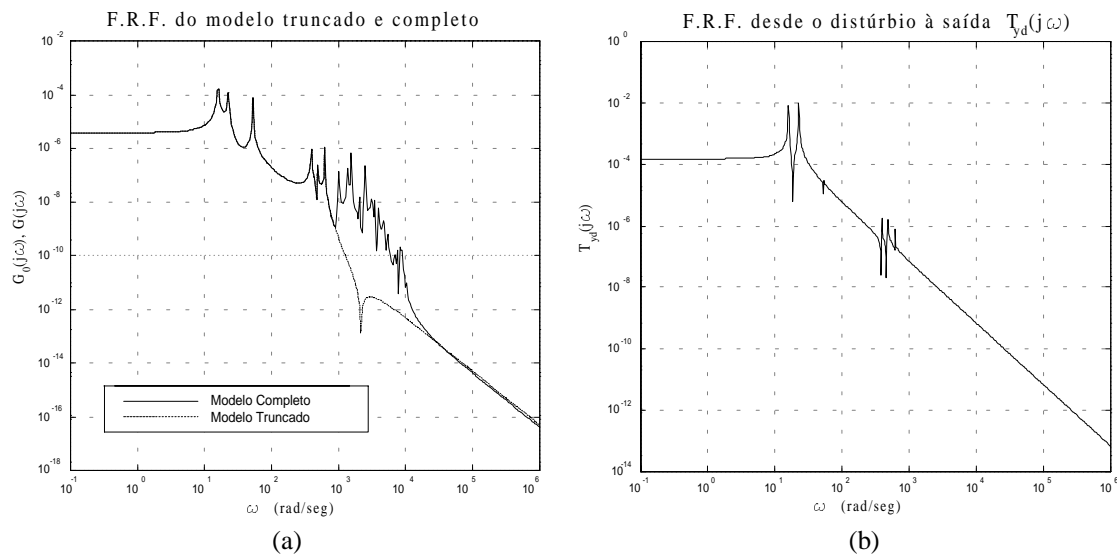


Figura 3 – Resposta em frequência da estrutura em malha aberta

4.1 Representação da dinâmica residual como incerteza no modelo

Para poder sintetizar um controlador robusto, em primeiro lugar é preciso representar a dinâmica residual como uma incerteza existente no modelo nominal devido ao truncamento. Essa pode ser representada numa das seguintes formas alternativas :

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{I} + \Delta_m(s)) \mathbf{G}_N(s) \quad \text{ou} \quad \mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_N(s) + \Delta_a(s) \quad (12)$$

onde $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$ é a função de transferência do modelo completo e $\mathbf{G}_N(s) = \mathbf{C}_N (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_N)^{-1} \mathbf{B}_N$ é a função de transferência do modelo nominal (truncado). A primeira representação é chamada de incerteza multiplicativa e a segunda de incerteza aditiva. A Fig. 4 mostra esses tipos de representações para o a estrutura em consideração.

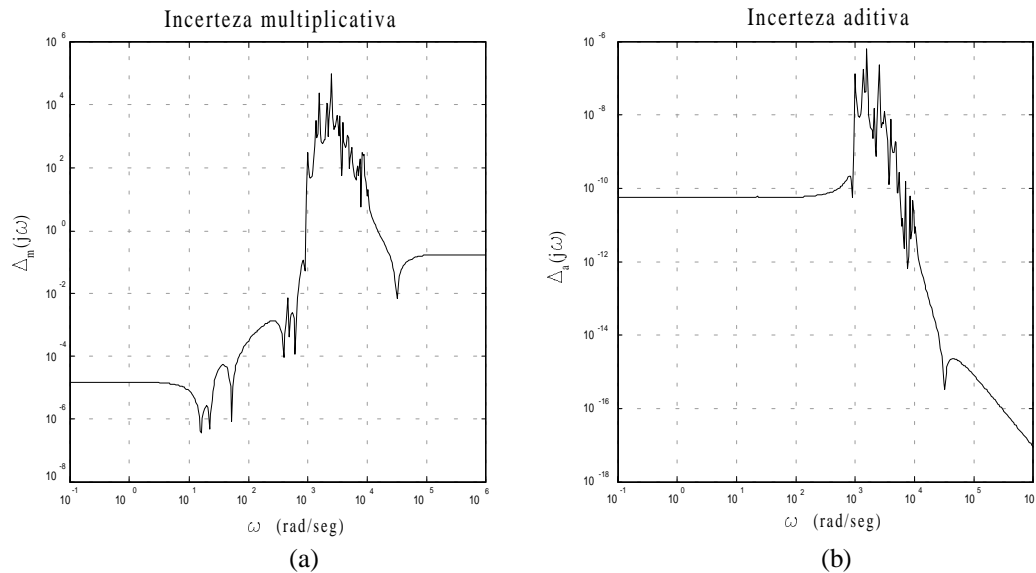


Figura 4 – Representação da incerteza devido à dinâmica residual

4.2 Condição de robustez

Uma condição suficiente para robustez diante de uma incerteza no modelo do tipo multiplicativa é dado pela seguinte relação (Zhou & Doyle, 1998):

$$\|\mathbf{T}(j\omega)\|_{\infty} < 1/l_m(j\omega) , \text{ com } l_m(j\omega) > \|\Delta_m(j\omega)\| , \quad \forall \omega \in R \quad (13)$$

onde a função de transferência \mathbf{T} é chamada de função sensibilidade complementar do sistema de controle e é definida na forma :

$$\mathbf{T}(s) = \mathbf{G}_N(s) \mathbf{C}(s) [\mathbf{I} - \mathbf{G}_N(s) \mathbf{C}(s)]^{-1} \quad (14)$$

A função de sensibilidade complementar representa a função de transferência entre o ruído no sensor e a saída do sistema.

4.3 Especificação de desempenho

Já que o objetivo do sistema de controle é amortecer a estrutura de forma ativa, a condição de desempenho pode ser expressa como uma restrição para a função de resposta em frequência de um distúrbio v_d (ver Fig. 2) e a saída y para o sistema em malha fechada. No caso do sistema sem controle esta função de transferência foi apresentada na Fig. 3-(b). Matematicamente, a condição de desempenho pode ser representada pela seguinte relação :

$$\|\mathbf{T}_{yd}(j\omega)\|_{\infty} < 10^{-3} , \quad \forall \omega \in [0, \omega_o] \quad (15)$$

onde ω_o é chamada largura de banda é representa uma freqüência limite para o desempenho do sistema. É fácil provar que a função de transferência \mathbf{T}_{yd} em malha fechada pode ser determinada por :

$$\mathbf{T}_{yd}(s) = \mathbf{S}(s) \mathbf{G}_d(s) \quad (16)$$

onde $\mathbf{S}(s) = [\mathbf{I} - \mathbf{G}_N(s) \mathbf{C}(s)]^{-1}$ é chamada de função sensibilidade do sistema e $\mathbf{G}_d(s) = \mathbf{C}_N (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_N)^{-1} \mathbf{L}_N$ é a função de transferência do distúrbio à saída quando o sistema está em malha aberta, ou seja, sem controle. A matriz \mathbf{L}_N é a matriz usada indicar a posição do distúrbio de maneira análoga à matriz \mathbf{B}_N usada para indicar a posição dos atuadores.

4.3 Determinação da planta generalizada

Uma forma conveniente para a estrutura da planta generalizada, obtida por aumentar com pesos \mathbf{W}_i a planta dada pelo modelo nominal está apresentada na Fig. 5 (Ingar, 1999).

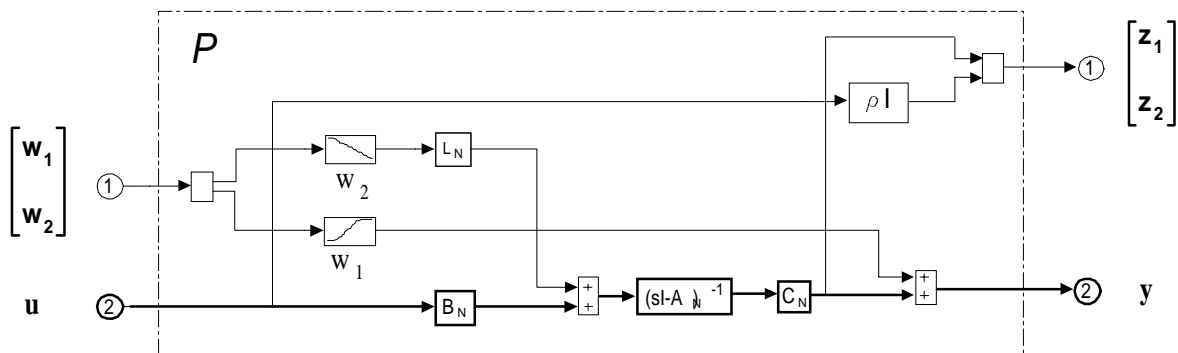


Figura 5 – Planta generalizada considerada para a síntese do controlador H_∞

Neste caso, a função de transferência dos sinais exógenos \mathbf{w} às variáveis de desempenho \mathbf{z} é dada por :

$$\mathbf{T}_{zw}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_2(s) \mathbf{S}(s) \mathbf{G}_d(s) & -\mathbf{W}_1(s) \mathbf{T}(s) \\ \rho \mathbf{W}_2(s) \mathbf{K}(s) \mathbf{G}_d(s) & \rho \mathbf{W}_1(s) \mathbf{K}(s) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Dessa última equação, pela propriedade mencionada na Eq. (11) e considerado, além disso, que $\mathbf{W}_1 = w_1 \mathbf{I}$ e $\mathbf{W}_2 = w_2 \mathbf{I}$, temos que :

$$\|\mathbf{T}(j\omega)\| < 1/w_1(j\omega), \quad \forall \omega \in R \quad (18)$$

$$\|\mathbf{S}(j\omega) \mathbf{G}_d(j\omega)\| = \|\mathbf{T}_{yd}(j\omega)\| < 1/w_2(j\omega), \quad \forall \omega \in [0, \omega_o] \quad (19)$$

onde, na última equação, foi usada também a Eq. (16).

4.4 Determinação dos pesos na planta generalizada

Comparando a Eq.(18) com a condição de robustez dada pela Eq. (13) , e a Eq.(19) com a especificação para o desempenho Eq. (15), temos as seguintes restrições para os pesos:

$$w_1^{-1}(j\omega) < 1/l_m(j\omega), \quad \text{com} \quad l_m(j\omega) > \|\Delta_m(j\omega)\|, \quad \forall \omega \in R \quad (20)$$

$$w_2^{-1}(j\omega) < 10^{-3}, \quad \forall \omega \in [0, \omega_o] \quad (21)$$

Com base nessas restrições, uma escolha conveniente é :

$$w_1(s) = \frac{s^4 + 40s^3 + 600s^2 + 4000s + 10000}{1 \times 10^{-6}s^4 + 1,26 \times 10^{-2}s^3 + 60s^2 + 1,265 \times 10^5s + 10^8} \quad (22)$$

$$w_2(s) = \frac{1 \times 10^{-8}s + 10^6}{s + 100} \quad (23)$$

A Fig. 6 mostra graficamente que tanto a Eq. (20) como a Eq. (21) são satisfeitas.

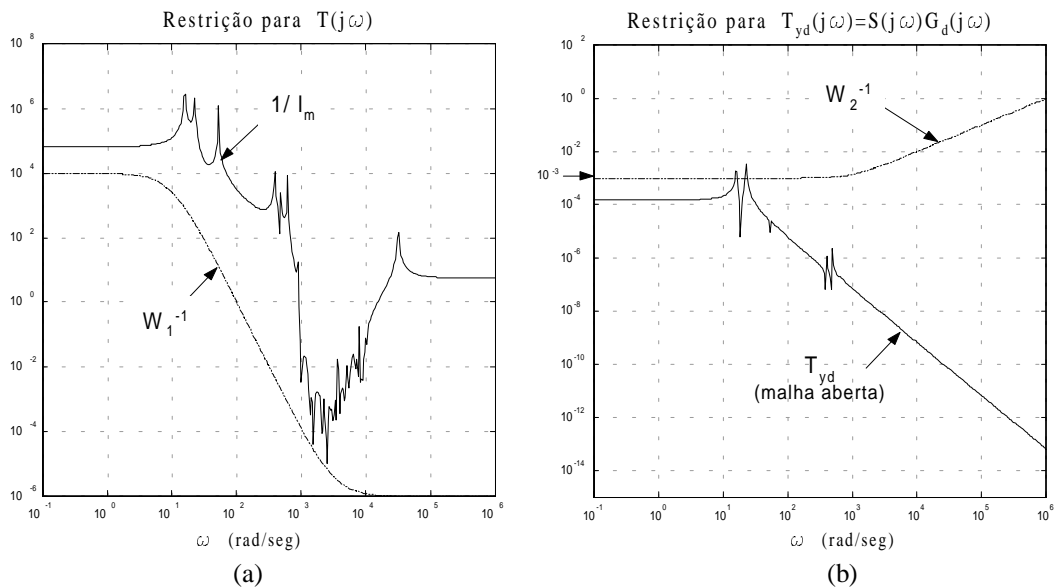


Figura 6 - Determinação das funções de ponderação para a síntese do controlador H_∞ .

O parâmetro ρ na planta generalizada está relacionado diretamente ao esforço de controle e no projeto foi mudado iterativamente até conseguir a existência do controlador H_∞ . O valor de 10^{-5} resultou suficiente.

5. RESULTADOS

Uma vez especificada a planta generalizada, o controlador H_∞ foi sintetizado com ajuda do Toolbox de Controle Robusto do Matlab[®]. A Fig. 7 mostra as propriedades do sistema resultante com este controlador implementado. Claramente pode verificar-se o cumprimento das condições de robustez e desempenho.

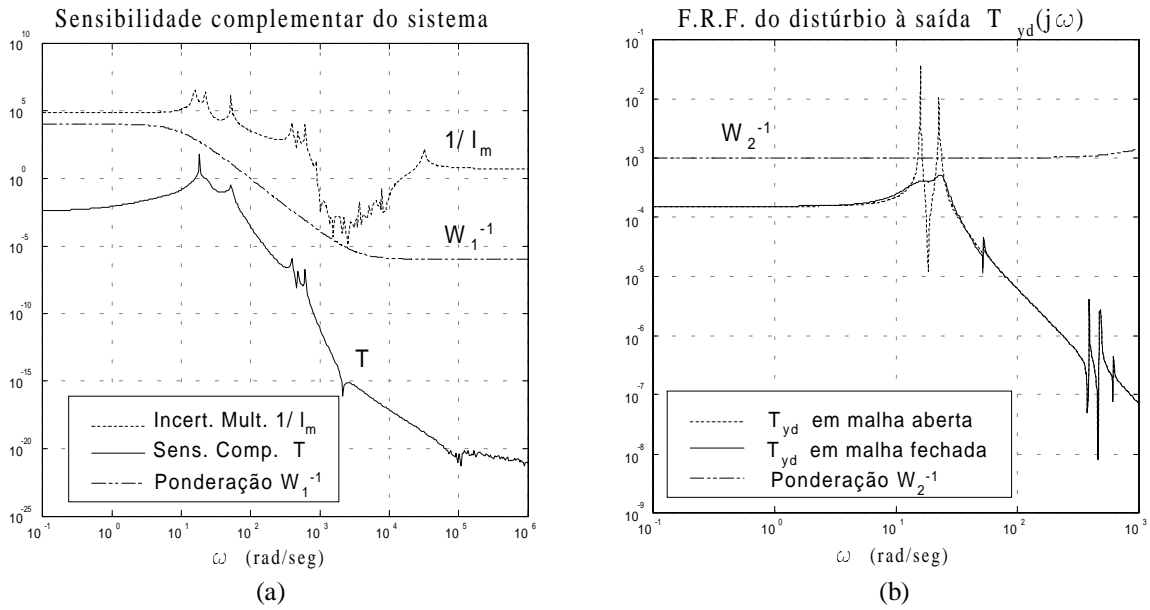


Figura 7 - Propriedades do sistema resultante com controlador H_∞

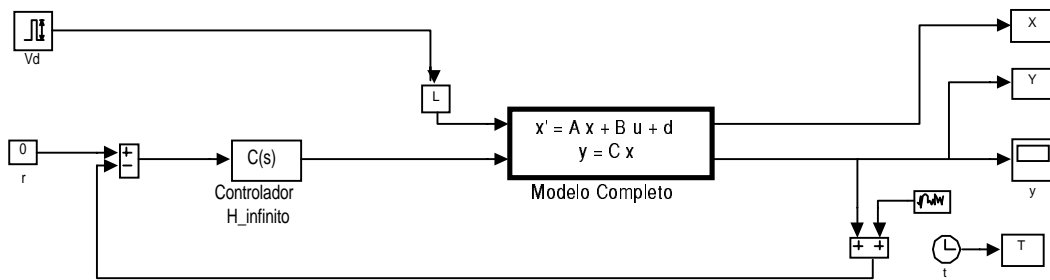


Figura 8 - Implementação do controlador robusto H_∞ sintetizado

Adicionalmente, para verificar a estabilidade do sistema na presença da dinâmica residual, foram determinados os autovalores do sistema em malha fechada usando o modelo completo, resultando todos os autovalores estáveis. Fez-se também uma simulação usando o Simulink[®] com o programa mostrado na Fig. 8. Os resultados da simulação são apresentados na Fig. 9.

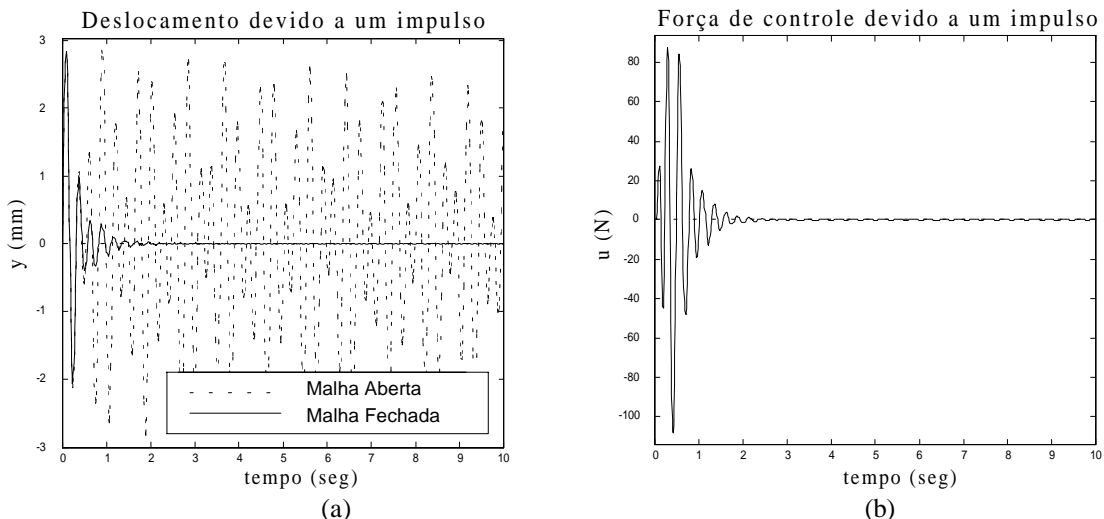


Figura 9 - Resposta impulsiva do sistema em malha aberta e em malha fechada

6. CONCLUSÕES

Uma metodologia baseada nas técnicas modernas de controle robusto foi aplicada satisfatoriamente para controlar uma estrutura flexível com muitos modos de vibração e pouco amortecida. Através dessa metodologia foi garantida a estabilidade do sistema de controle diante da dinâmica residual existente devido ao truncamento dos modos de altas frequências e ao mesmo tempo assegurando um bom desempenho do sistema. Esta técnica resultou prática, simples e efetiva. No entanto, teve a pequena desvantagem de aumentar ligeiramente a ordem do controlador. Assim, na aplicação considerada, a ordem do modelo nominal foi de 12 enquanto que a ordem do controlador sintetizado foi de 17 que é, no entanto muito menor que a ordem do modelo completo, que é de 81.

REFERÊNCIAS

- Chait, Y. & Radcliffe, C. J., 1989, Control of flexible structures with spillover using an augmented observer, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 12, No.2, pp. 155-161
- Doyle, J. C., Glover K., Khargonekar P.P. and Francis B. A., 1989, State-space solutions to standard H_∞ and H_2 control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, No. 8, pp 831-847.
- Ingar, C. E., 1999, Uma introdução ao controle robusto com aplicações a estruturas flexíveis, Tese de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Brasil (<http://www.mec.puc-rio.br/prof/rsampaio/rsampaio.html>).
- Junkins, J. L. & Kim, Y., 1993, *Introduction to Dynamics and Control of Flexible Structures*, AIAA Education Series Inc.
- Meirovitch L., 1983, On the problem of observation spillover in self-adjoint distributed parameter systems, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.39, No.2, pp. 269-291
- Meirovitch L., 1990, *Dynamical and Control of Structures*, John Wiley and Sons Inc.
- Zhou, K. & Doyle, J. C., 1998, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall.

ROBUST- H_∞ CONTROL FOR FLEXIBLE STRUCTURES WITH REDUCED DYNAMIC

Abstract. *A solution for the spillover appearing in the active control of flexible structures lightly damped using the new techniques of robust control H_∞ with feedback is presented. This technique assures the stability of the control system even in the presence of the residual dynamics and gives a robust controller that in addition has a good performance. As an example, a control system is synthesized for a flexible structure formed by bar elements and modeled through the finite element method. The project was done by using the Matlab[®] and Simulink[®], and the results show the efficacy of the solution proposed.*

Keywords: *Flexible structure, Spillover, Robust control*